Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti
Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat.
Vol. LXXIII (1995) - Adunanza del 20 ottobre 1995

DEFORMATIONS DE VARIETES HOLOMORHES

ADELINA FABIANO - JACQUES GUENOT
(pres. dalla Prof. Gaetana Restuccia)

1 Introduction

Soit X une variété holomorphe et soit M un fibré vectoriel holomorphe de base X. Pour tout couple d'entiers (p, q), nous désignerons par $\Omega_X^{p,q}$ le fibré des formes différentielles de bidegré (p, q) sur X et par $\mathscr{E}^{p,q}(X; M)$ l'espace des formes différentielles de classe $\mathscr{C}^\infty$ de bidegré (p, q) à coefficients dans M, c'est à dire l'espace $\mathscr{C}^\circ(X; M \otimes \Omega^{p,q})$. Remarquons que pour tout entier p, le fibré vectoriel $\Omega_X^{p,0}$ est holomorphe. Nous désignerons alors par $\mathscr{O}^p(X; M)$ l'espace des formes différentielles holomorphes de degré p à coefficients dans M, c'est à dire l'espace $\mathscr{O}(X; M \otimes \Omega_X^{p,0})$.

Rappelons que l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_X$ fournit un complexe d'espaces de Fréchet et d'applications linéaires continues

$$\cdots \to \mathscr{E}^{0,q}(X; M) \xrightarrow{\bar{\partial}_X} \mathscr{E}^{0,q+1}(X; M) \to \cdots$$

dont les groupes de cohomologie $\mathbb{H}^p(X, M)$ s'identifient canoniquement aux groupes de cohomologie de la variété X à coefficients dans le faisceau $\mathscr{O}_M$ des sections holomorphes de M. En particulier, si la variété X est supposée compacte, ces groupes de cohomologie sont des espaces vectoriels topologiques séparés de dimension finie.

Soit π une submersion hyolomorphe propre d'une variété holomorphe X de dimension $m+n$ dans un polydisque S de centre l'origine dans $\mathbb{C}^m$, et soit M un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Pour tout point s de S, la fibre $X(s)$ de π en s est une sous-variété holomorphe compacte de codimension m dans X et la restriction $M(s)$ de M à $X(s)$ est un fibré vectoriel holomorphe sur $X(s)$.

L'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_{X(s)}$ fournit alors un complexe d'espaces de Fréchet et d'applications linéaires continues

$$\cdots \to \mathscr{E}^{0,q}(X(s); M(s)) \xrightarrow{\bar{\partial}_{X(s)}} \mathscr{E}^{0,q+1}(X(s); M(s)) \to \cdots .$$

Le but de ce travail est de fournir la démonstration la plus élémentaire possible du théoème suivant. Nous aurons malheureusement besoin de la théorie des *complexes différentiels elliptiques.* Les auteurs espèrent pouvoir éliminer cet inconvénient dans un prochain travail sur la *parametrix.*

THÉORÈME 1.1. *Après restriction éventuelle du polydisque S, il est possible de trouver un complexe*

$$\cdots \to V^q \xrightarrow{u_q} V^{q+1} \cdots$$

de fibrés vectoriels holomorphes sur S, qui ait les propriétés suivantes:

(1) Pour tout point s de S, le complexe

$$\cdots \to V^q(s) \xrightarrow{u_q(s)} V^{q+1}(s) \cdots$$

est quasi-isomorphe([1]) *au complexe*

$$\cdots \to \mathscr{E}^{0,q}(X(s); M(s)) \xrightarrow{\bar\partial_{X(s)}} \mathscr{E}^{0,q+1}(X(s); M(s)) \to \cdots .$$

(2) Le complexe

$$\cdots \to \mathscr{O}(S; V^q) \xrightarrow{u_q} (S; V^{q+1}) \to \cdots$$

est quasi-isomorphe au complexe

$$\cdots \to \mathscr{E}^{0,q}(X; M) \xrightarrow{\bar\partial_X} \mathscr{E}^{0,q+1}(X; M) \to \cdots .$$

COROLLAIRE 1.1. (Théorème de semi-continuité) *Pour tout couple d'entiers* (p, q), *l'ensemble*

$$\{s \in S |\, \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^p(X(s); M(s)) \geq q\}$$

est un sous-ensemble analytique de S.

COROLLAIRE 1.2. *La caractéristique d'Euler-Poincarré du complexe*

$$\cdots \to \mathscr{E}^{0,q}(X(s); M(s)) \xrightarrow{\bar\partial_{X(s)}} \mathscr{E}^{0,q+1}(X(s); M(s)) \to \cdots$$

est localement constante.

COROLLAIRE 1.3. (Théorème des images directes) *Désignons par* $\mathscr{O}_M$ *le faisceau des sections holomorphes de* M. *Pour tout entier* p, *le faisceau* $R^p\pi\mathscr{O}_M$ *est cohérent.*

Dans [5], Schneider donne une démonstration (moins élémentaire) d'un résultat plus général et dans [4] Hubbard donne une démonstration (incomplète) du même résultat.

Pour simplifier les notations, nous supposerons que le fibré vectoriel M est le fibré vectoriel produit de rang 1 sur X.

([1]) Deux complexes sont quasi-isomorphes s'ils ont des groupes de cohomologie isomorphes.

Tous les résultats que nous avons en vue étant de nature locale par rapport à S, nous nous permettrons, sans trop de cérémonie, de restreindre ce polydisque chaque fois que le besoin s'en fera sentir.

Nous dirons qu'une carte ϕ de X est *adaptée* si l'image par π de son domaine U coincide avec S et si l'application partielle $(\phi_1, \ldots, \phi_m)$ coincide avec $\pi|_U$. Puisque π est une submersion propre, on peut supposer, en restreignant au besoin S, qu'il existe un atlas de X formé de cartes adaptées.

Au numéro 3, nous imposerons des conditions supplémentaires pour qu'une carte soit adaptée.

Soit ϕ une carte adaptée de domaine U. L'application

$$h = (\phi_{m+1}, \ldots, \phi_{m+n})$$

de U dans $\mathbb{C}^n$ est holomorphe et pour tout point s de S sa restriction $h(s)$ à l'ensemble

$$U(s) = U \cap X(s)$$

est une carte de la variété $X(s)$. En particulier, pour tout entier r, les différentielles de la forme(²)

$$d\bar{\phi}_l = d\bar{\phi}_{l(1)} \wedge \cdots \wedge d\bar{\phi}_{l(r)} \quad \text{avec} \quad l \in S(r; m+n)$$

constituent une base du fibré vectoriel $\Omega_X^{0,r}|_U$ et les différentielles de la forme

$$d\overline{h(s)}_k = d\overline{h(s)}_{k(1)} \wedge \ldots \wedge d\overline{h(s)}_{k(r)} \quad \text{avec} \quad k \in S(r; n)$$

une base du fibré vectoriel $\Omega_{X(s)}^{0,r}|_{U(s)}$.

Nous introduirons systématiquement les notations suivantes pour les fonctions coordonnés d'une carte adapté:

$$s_\mu = \pi_\mu \text{ pour } \mu = 1, \ldots, m \text{ et } z_\nu = \phi_{m+\nu} \text{ pour } \nu = 1, \ldots, n.$$

(²) Pour tout couple d'entiers (p, q) nous indiquerons par $S(p, q)$ l'ensemble des applications strictement croissantes de l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$ dans l'ensemble $\{1, \ldots, q\}$.

Les différentielles de la forme

$$d\bar{s}_j \wedge d\bar{z}_k \quad \text{avec} \quad j \in S(p; m) \quad \text{et} \quad k \in S(q; n) \text{ et } p + q = r$$

constituent donc une base du fibré vectoriel $\Omega_X^{0,r}|_U$.

2 Différentielles relatives

La submersion π induit un épimorphisme

$$\nu : T_X \to \pi^*(T_S)$$

de fibrés vectoriels holomorphes de base X, où l'on désigne par T_X et T_S le fibré tangent à X et à S respectivement. Le noyau T_π de cet épimorphisme est un sous-fibré vectoriel holomorphe de T_X et, pour tout point s de S, le fibré vectoriel $T_\pi(s)$ s'identifie canoniquement au fibré tangent $T_{X(s)}$.

Pour tout couple d'entiers (p, q), avec $p+q = r$, le passage à l'algèbre de Grassmann fournit un morphisme

$$\nu_p^r : \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes \Omega_X^{0,q} \to \Omega_X^{0,r}$$

de fibrés vectoriels différentiels de base X.

LEMME 2.1. *L'image F_p^r du morphisme ν_p^r est un sous-fibré vectoriel différentiel de $\Omega_X^{0,r}$.*

Démonstration. Soit ϕ une carte adaptée et soit U son domaine.

Les différentielles de la forme

$$d\bar{\phi}_l \quad \text{avec} \quad l \in S(r; m+n) \quad \text{et} \quad l(p) \leq m$$

constituent une base de $F_p^r|_U$, ce qui démontre l'assertion. □

On obtient ainsi une filtration du fibré vectoriel différentiel $\Omega_X^{0,r}$ par des sous-fibré vectoriels

$$(*) \qquad \Omega_X^{0,r} = F_0^r \supset \cdots \supset F_p^r \supset F_{p+1}^r \supset \cdots .$$

Nous désignerons par $G^{p,q}$ le fibré vectoriel quotient F_p^r / F_{p+1}^r. Remarquons que F_p^r (resp. $G^{p,q}$) est nul si $p > m$ ou si $r > m+n$ (resp. si $p > m$ ou si $q > n$).

Remarque 2.1. La filtration (*) est compatible avec le produit extérieur de l'algèbre de Grassman. Par passage aux quotients, les fibres du fibré vectoriel

$$G = \bigoplus_{p,q} G^{p,q}$$

sont donc canoniquement munies d'une structure d'algèbre bigraduée, anticommutative dans un sens que le lecteur précisera aisément.

Par passage aux sections, la filtration (*) induit une filtration

$$\mathscr{E}^{0,r}(X) = \mathscr{C}^\infty(X; F_0^r) \supset \cdots \supset \mathscr{C}^\infty(X; F_p^r) \supset \mathscr{C}^\infty(X; F_{p+1}^r) \supset \cdots$$

compatible avec l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_X$. En remarquant que l'espace quotient $\mathscr{C}^\infty(X; F_p^r)/\mathscr{C}^\infty(X; F_{p+1}^r)$ s'identifie canoniquement à l'espace $\mathscr{C}^\infty(X; G^{p,q})$, on en déduit pour tout entier p un complexe

$$\cdots \to \mathscr{C}^\infty(X; G^{p,q}) \xrightarrow{\bar{\partial}_\pi} \mathscr{C}^\infty(X; G^{p,q+1}) \to \cdots .$$

L'opérateur $\bar{\partial}_\pi$ possède des propriétés formelles analogues à celles de l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_X$.

Examinons ce qui se passe dans le domaine U d'une carte adaptée ϕ. Pour $\nu = 1, \ldots, n$, nous désignerons par $\bar{\theta}_\nu$ la classe de la forme différentielle $d\bar{z}_\nu$ dans $\mathscr{C}^\infty(U; G^{0.1})$. Il résulte immédiatement des définitions que les sections de la forme

$$d\bar{s}_j \wedge \bar{\theta}_k \quad \text{avec} \quad j \in S(p; m) \quad \text{et} \quad k \in S(q; n)$$

constituent une base de $G^{p,q}|_U$.

Tout élément α de $\mathscr{C}^\infty(U; G^{p,q})$ s'écrit donc d'une manière et d'une seule

$$\alpha = \sum_{\substack{j \in S(p;m) \\ k \in S(q;n)}} a_{jk} d\bar{s}_j \wedge \bar{\theta}_k$$

où les a_{jk} sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur U, et l'on a

$$\bar{\partial}_\pi \alpha = \sum_{\substack{j \in S(p;m) \\ k \in S(q;n)}} \left(\sum_{1 \leq \nu \leq n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial \bar{z}_\nu} \bar{\theta}_\nu \right) \wedge d\bar{s}_j \wedge \bar{\theta}_k.$$

Remarque 2.2. Il n'y a pas de manière canonique d'identifier les sections de $G^{p,q}$, appelées parfois *différentielles relatives* de X sur S, à des différentielles usuelles sur X. Remarquons cependant que pour tout point s de S, l'injection canonique ι_s de $X(s)$ dans X induit un épimorphisme

$$\iota_s^* : \Omega_X^{0,r}(s) \to \Omega_{X(s)}^{0,r}$$

de fibrés vectoriels différentiels de base $X(s)$ dont le noyau coincide $F_1^r(s)$.

On en déduit un isomorphisme canonique de $G^{0,r}(s)$ sur $\Omega_{X(s)}^{0,r}$ au moyen duquel on identifie ces deux fibrés. Ceci signifie que, dans la carte adaptée ϕ, on identifie les sections $\bar{\theta}(s)$ aux différentielles $d\overline{h(s)}$.

Remarquons en passant que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{C}^\infty(X; G^{0,r}) & \xrightarrow{\bar{\partial}_\pi} & \mathscr{C}^\infty(X; G^{0,r+1}) \\
\iota_s^* \downarrow & & \downarrow \iota_s^* \\
\mathscr{E}^{0,r}(X(s)) & \xrightarrow{\bar{\partial}_{X(s)}} & \mathscr{E}^{0,r+1}(X(s))
\end{array}$$

est commutatif.

Remarque 2.3. La contemplation du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\pi^*(\Omega_s^{0,p}) \otimes \pi^*(\Omega_S^{0,1}) \otimes \Omega_X^{0,q-1} & \xrightarrow{1 \otimes \nu_1} & \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes \Omega_X^{0,q} \\
\wedge \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \nu_p^r \\
\pi^*(\Omega_S^{0,p+1}) \otimes \Omega_X^{0,q-1} & \xrightarrow{\nu_{p+1}^r} & F_p^r
\end{array}$$

montre que ν_p^r induit par passage aux quotients un morphisme canonique

$$\pi^*(\Omega_S^{0,p+1}) \otimes G^{0,q} \to G^{p,q}$$

dont on vérifie aisément que c'est un isomorphisme. On s'en sert pour identifier ces deux fibrés.

3 Introduction d'une trivialisation

Désignons par Y la fibre $X(0)$. L'extension d'un fameux théorème d'Ehresmann [1] montre qu'il existe un difféomorphisme Φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $S \times Y$ sur X, holomorphe par rapport à S (i.e. tel que pour tout point y de Y l'application partielle $\Phi(\ ,y)$ de S dans X soit holomorphe), qui commute avec les projections (i.e. qui vérifie la relation $\pi \circ \Phi = pr_1$) et tel que l'application partielle $\Phi(0,\ )$ coincide avec l'inclusion canonique de Y dans X.

On choisit une fois pour toutes un tel difféomorphisme et l'on s'en sert pour identifier les variétés *différentielles* sous-jacentes à $S \times Y$ et à X et, pour tout point s de S, les variétés *différentielles* sous-jacentes à Y et à $X(s)$.

La projection naturelle pr_2 de $S \times Y$ dans Y est holomorphe pour la structure produit mais non en général pour la structure de X. On observera cependant que les fibres de cette projection sont des sous-variétés holomorphes de X et de $S \times Y$.

Soit ϕ une carte adaptée dont le domaine U soit de la forme $S \times V$ où V est un ensemble ouvert de Y (quitte à restreindre S, on peut trouver un atlas de X formé de cartes adaptées qui vérifient cette ultérieure condition). Comme observé au numéro 1, l'application

$$h = (\phi_{m+1}, \ldots, \phi_{m+n})$$

de U dans $\mathbb{C}^n$ est holomorphe et, pour tout point s de S, l'application partielle $h(s, \ )$ est une carte de domaine V dans la variéte $X(s)$. On définit donc une carte ψ de la variété produit $S \times Y$, ayant encore U comme domaine, en posant

$$\psi(s, y) = (s, h(0, y)).$$

Le changement de carte γ de ψ dans ϕ (on respectera l'ordre) s'écrit donc

$$\gamma(\zeta_1, \ldots, \zeta_{m+n}) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m, u_1(\zeta_1, \ldots, \zeta_{m+n}), \ldots$$

$$\ldots, u_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{m+n}))$$

où $u = (u_1, ..., u_n)$ est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\psi(U)$ dans $\mathbb{C}^n$. Les hypothèses faites sur le difféomorphisme Φ qui nous a servi à identifier les variétés $S \times Y$ et X impliquent que u est en fait holomorphe par rapport aux variables $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ (mais non en général par rapport aux variables $\zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_{m+n}$).

Remarquons que l'on a

$$u(0, \ldots, 0, \zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_{m+n}) = (\zeta_{m+1}, \ldots, \zeta_{m+n}).$$

En particulier, la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial \zeta_{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial \zeta_{m+n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \zeta_{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial \zeta_{m+n}} \end{pmatrix}$$

est inversible au voisinage de l'ensemble

$$\psi(U) \cap \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_{m+n}) \in \mathbb{C}^{m+n} | \zeta_1 = \cdots = \zeta_m = 0\}.$$

Quitte à restreindre nouvellement S, on peut supposer (ce que nous ferons) qu'il existe un atlas de X formé de cartes adaptées pour lesquelles la matrice ci-dessus soit inversible en tout point de $\psi(U)$.

Conservons les notations précédentes. Nous indiquerons systématiquement les fonctions coordonnées de la carte ψ de la manière suivante

$$\begin{cases} t_\mu = \psi_\mu & \text{pour } \mu = 1, \ldots, m \\ w_\nu = \psi_{m+\nu} & \text{pour } \nu = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Le changement de carte γ de ψ dans ϕ s'écrit donc

$$s = t \quad \text{et} \quad z = u(t, w).$$

Nous poserons encore

$$A = \frac{\partial h}{\partial w} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial \zeta_{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial \zeta_{m+n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \zeta_{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial \zeta_{m+n}} \end{pmatrix} \circ \psi$$

$$B = \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{\zeta}_{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{\zeta}_{m+n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \bar{\zeta}_{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial \bar{\zeta}_{m+n}} \end{pmatrix} \circ \psi$$

$$C = \frac{\partial h}{\partial t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial \zeta_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial \zeta_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial \zeta_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial \zeta_m} \end{pmatrix} \circ \psi.$$

Remarquons que ces matrices sont holomorphes par rapport à S et que A est inversible en tout point de U.

On vérifie aisément que l'on a (on utilise des notations matricielles, assimilant les différentielles à des vecteurs colonnes)

$$ds = dt \quad dz = Adw + Bd\bar{w} + Cdt$$

$$d\bar{s} = d\bar{t} \quad d\bar{z} = \bar{B}dw + \bar{A}d\bar{w} + \bar{C}d\bar{t}$$

et (on utilise dei notations matricielles, assimilant les dérivées à des vecteurs lignes)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial z}C \quad \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial s}A + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{C} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial}{\partial z}B + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{A}.$$

Pour trouver les formules réciproques des précédentes, on est amené à inverser la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Posons à cet effet

$$D = A^{-1}B \quad \text{et} \quad E = 1 - D\bar{D}.$$

Remarquons que D est nolomorphe par rapport à S et que E vérifie la relation

$$ED = D\bar{E}.$$

Un calcul élémentaire montre alors que l'on a

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -D\bar{A}^{-1} \\ -\bar{D}A^{-1} & \bar{A}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \bar{E} \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice E est inversible en tout point de U, et si l'on pose

$$J = (AE)^{-1},$$

on voit sans difficultés que l'on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} J & -D\bar{J} \\ -\bar{D}J & \bar{J} \end{pmatrix}.$$

On est alors conduit aux formules

$$dt = ds \quad dw = J(dz - Cds) - D\bar{J}(d\bar{z} - \bar{C}d\bar{s})$$

$$d\bar{t} = d\bar{s} \quad d\bar{w} = -\bar{D}J(dz - Cds) + \bar{J}(d\bar{z} - \bar{C}d\bar{s})$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\bar{D}\right) JC \quad \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\bar{D}\right) J$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \left(\frac{\partial}{\partial w}D - \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right) \bar{J}\bar{C} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = -\left(\frac{\partial}{\partial w}D - \frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right) \bar{J}.$$

4 Le premier bicomplexe

Pour tout couple d'entiers (p, q), avec $p+q = r$, on obtient un morphisme

$$\tilde{\Phi} : \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes pr_2^*(\Omega_Y^{0,q}) \to \Omega_{S\times Y}^r = \Omega_X^r \to \Omega_X^{0,r}$$

de fibrés vectoriels différentiels de base X en composant le produit extérieur dans l'algèbre de Grassmann avec la projection sur la composante de bidegré $(0, r)$.

Dans la carte adaptée ϕ, ce morpisme est caractérisé par les formules

$$\tilde{\Phi}(d\bar{t}) = d\bar{s} \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi}(d\bar{w}) = \bar{J}(d\bar{z} - \bar{C}d\bar{s}).$$

Son image est donc contenue dans le fibré vectoriel F_p^r et l'on en déduit un morphisme

$$\Phi : \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes pr_2^*(\Omega_Y^{0,q}) \to G^{p,q}$$

caractérisé par les formules

$$\Phi(d\bar{t}) = d\bar{s} \quad \text{et} \quad \Phi(d\bar{w}) = \bar{\theta}.$$

On voit en particulier que Φ est un isomorphisme.

L'espace $\mathscr{C}^\infty(X; \pi^*(\Omega_S^{0,p}) \otimes pr_2^*(\Omega_Y^{0,q}))$ s'identifiant canoniquement à l'espace $\mathscr{E}^{0,p}(S; \mathscr{E}^{0,q}(Y))$, l'opérateur de Cauchy-Riemann $\bar{\partial}_S$ fournit pour tout entier q un complexe

$$\cdots \to \mathscr{E}^{0,p}(S; E^{0,q}(Y)) \xrightarrow{\bar{\partial}_S} \mathscr{E}^{0,p+1}(S; \mathscr{E}^{0,q}(Y)) \cdots$$

acyclique en degrés positifs (on rappelle que S est un polydisque).

En transportant l'opérateur $\bar{\partial}_\pi$ au moyen de l'isomorphisme Φ on obtient d'autre part, pour tout entier p, un complexe rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \cdots \to \mathscr{E}^{0,p}(S; \mathscr{E}^{0,q}(Y)) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathscr{E}^{0,p}(S; \mathscr{E}^{0,q+1}(Y)) \cdots \\ \Phi \downarrow & & \Phi \downarrow \\ \cdots \to \mathscr{C}^\infty(X; G^{p,q}) & \xrightarrow{\bar{\partial}_\pi} & \mathscr{C}^\infty(X; G^{p,q+1}) \cdots \end{array}$$

LEMME 4.1. *Dans la carte adaptée ϕ l'operateur ϵ est caractérisé par les propriétés suivantes:*

(1) Pour toute fonctions f de classe C^∞, on a

$$\epsilon(f) = -\left(\frac{\partial f}{\partial w} D - \frac{\partial f}{\partial \bar{w}}\right) d\bar{w}.$$

(2) On a

$$\epsilon(d\bar{t}) = 0 \quad \textit{et} \quad \epsilon(d\bar{w}) = 0.$$

Démonstration. La première assertion et la première égalité de la deuxième résultent immédiatement des définitions et des formules du numéro précédent.

Pour démontrer la deuxième ègalité de la deuxième assertion, on remarque tout d'abord que sur toute variété holomorphe, la composante de bidegré (O, r) d'une différentielle d-fermée de degré r est $\bar{\partial}$-fermée. En particulier, pour tout point s de S, la composante de bidegré (0, 1) de la différentielle $d\bar{w}$ dans l'ensemble ouvert V de la variété holomorphe $X(s)$, qui n'est autre que la différentielle

$$(J\bar{\theta})(s) = \bar{J}(s)d\overline{h(s)}$$

est $\bar{\partial}_{X(s)}$-fermée, ce qui démontre l'assertion. □

Remarque 4.1. On encourage vivement le lecteur à vérifier par le calcul que l'on a

$$\frac{\partial \bar{J}_{jk}}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial \bar{J}_{je}}{\partial \bar{z}_k} \quad \text{pour} \quad j, k, l = 1, \dots, n.$$

PROPOSITION 4.1. *Le module bigradué*

$$\bigoplus_{p,q} \mathscr{E}^{0,p}(S; \mathscr{E}^{0,q}(Y))$$

muni des différentielles $\bar{\partial}_S$ *et* ϵ *est un bicomplexe* $\bar{\partial}_S$*-acyclique en degrés positifs.*

Démonstration. Il suffit de vérifier la relation

$$\epsilon\bar{\partial}_S + \bar{\partial}_S\epsilon = 0.$$

La question étant locale, on se place dans la carte adaptée ϕ. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, on a (lemme (4.1))

$$\begin{aligned}(\epsilon\bar{\partial}_S)(f) &= \sum_{1\le j\le m} \epsilon\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j}\right) \wedge d\bar{t}_j \\ &= -\sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le k,l\le n}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial \bar{t}_j} D_{lk} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{w}_k \partial \bar{t}_j}\right) d\bar{w}_k \wedge d\bar{t}_j\end{aligned}$$

et, puisque D est holomorphe par rapport à S,

$$(\bar{\partial}_S \epsilon)(f) = -\sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le k,l\le n}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{t}_j \partial w_l} D_{lk} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{t}_j \partial \bar{w}_k} \right) d\bar{t}_j \wedge d\bar{w}_k$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas. Compte tenu des relations du lemme (4.1), le cas général est alors immédiat. □

COROLLAIRE 4.1. *L'inclusion canonique du complexe*

$$\cdots \to \mathscr{O}(S; \mathscr{E}^{0,q}(Y)) \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{O}(S; \mathscr{E}^{0,q+1}(Y)) \to \cdots$$

dans le complexe total associé au bicomplexe de la proposition (4.1) est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. L'assertion résulte immédiatement de la proposition (4.1) et des propriétés formelles des bicomplexes. □

5 Le deuxième bicomplexe

On peut aussi transporter l'opérateur $\bar{\partial}_S$ au moyen de l'isomorphisme Φ. On obtient alors pour tout entier q un complexe rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \to \mathscr{E}^{0,p}(S; \mathscr{E}^{0,q}(Y)) & \xrightarrow{\bar{\partial}_S} & \mathscr{E}^{0,p+1}(S; \mathscr{E}^{0,q}(Y)) \to \cdots \\
\phi \downarrow & & \phi \downarrow \\
\cdots \to \mathscr{C}^\infty(X; G^{p,q}) & \xrightarrow{\delta} & \mathscr{C}^\infty(X; G^{p+1,q}) \to \cdots
\end{array}$$

LEMME 5.1. *Dans la carte adaptée ϕ, l'opérateur δ est caractérisé par les propriétés suivantes:*

(1) Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$, on a

$$\delta(f) = \sum_{1\le j\le m} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} d\bar{s}_j.$$

(2) On a $\delta(d\bar{s}) = 0$.

(3) Pour $k = 1, \ldots, n$, *on a*

$$\delta(\bar{\theta}_k) = - \sum_{1 \le j \le m} \bar{\partial}_\pi \bar{C}_{kj} \wedge d\bar{s}_j .$$

Démonstration. Les deux premières assertions résultent immédiatement des définitions. Pour démontrer la troisième, on commence par remarquer que l'on a (on rappelle que la matrice D est holomorphe par rapport à S)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}}(1 - \bar{D}D) = -\frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{t}} D = -\frac{\partial (\bar{A}^{-1}\bar{B})}{\partial \bar{t}} D \\ &= \bar{A}^{-1} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} \bar{D} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{t}} \right) D \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{A}\bar{E})}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial (\bar{A})}{\partial \bar{t}} \bar{E} + \bar{A} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{t}} \\ &= \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} \bar{D} D - \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{t}} D = \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial \bar{t}} D. \end{aligned}$$

Remontant à la définition de A et B, on en déduit que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{A}\bar{E})_{kl}}{\partial \bar{t}_j} &= \frac{\partial \bar{A}_{kl}}{\partial \bar{t}_j} - \sum_{1 \le \nu \le n} \frac{\partial \bar{B}_{k\nu}}{\partial \bar{t}_j} D_{\nu l} \\ &= \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{w}_l} - \sum_{1 \le \nu \le n} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial w_\nu} D_{\nu l} = \sum_{1 \le \nu \le n} \frac{\partial \bar{C}_{kj}}{\partial \bar{z}_\nu} (\bar{A}\bar{E})_{\nu l} \end{aligned}$$

pour $j = 1, \ldots, m$ et $k, l = 1, \ldots, n$ (la dernière égalité résulte des formules du numéro 3). Ceci implique que l'on a

$$\begin{aligned}\bar\partial_S(\phi^{-1}(\bar\theta_k)) &= \sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le l\le n}} \frac{\partial(\bar A\bar E)_{kl}}{\partial \bar t_j} d\bar t_j \wedge d\bar w_l \\ &= \sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le l,\nu\le n}} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar z_\nu}(\bar A\bar E)_{\nu l} d\bar t_j \wedge d\bar w_t \\ &= -\sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le \nu\le n}} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar z_\nu}\phi^{-1}(\bar\theta_\nu)\wedge d\bar t_j,\end{aligned}$$

d'où l'assertion.

Par composition de l'isomorphisme Φ^{-1} et du morphisme $\tilde\Phi$ défini au numéro précédent, on obtient pour tout couple d'entiers (p, q) avec $p+q=r$ un morphisme

$$\Psi : G^{p,q} \to \Omega_X^{0,r}$$

de fibrés vectoriels différentiels de base X. Dans la carte adaptée ϕ, ce morphisme est caractérisé par les formules

$$\Psi(d\bar s) = d\bar s \quad \text{et} \quad \Psi(\bar\theta) = d\bar z - \bar C d\bar s.$$

Ceci implique en particulier que le morphisme somme

$$\Psi : \bigoplus_{p+q=r} G^{p,q} \to \Omega_X^{0,r}$$

est un isomorphisme (et la filtration de $\Omega_X^{0,r}$ par les sous-fibrés F_p^r associée à une graduation!).

THÉORÈME 5.1. *Le module bigradué*

$$\bigoplus_{p,q} \mathscr{C}^\infty(X; G^{p,q})$$

muni des différentielles δ et $\bar\partial_\pi$ est un bicomplexe δ-acyclique en degrés positifs. A travers l'isomorphisme Ψ, la différentielle *totale de ce bicomplexe s'identifie à l'opérateur de Cauchy-Riemann* $\bar{\partial}_X$.

Démonstration. La première partie du théorème résulte immédiatement de la proposition (4.1). Il suffit donc de démontrer que l'on a

$$\Psi(\delta+\bar{\partial}_\pi)=\bar{\partial}_X\Psi.$$

La question étant locale, on peut se placer dans la carte adaptée ϕ.

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, on a (lemme (5.1))

$$\begin{aligned}
(\Psi(\delta+\bar{\partial}_\pi))(f) &= \Psi\left(\sum_{1\le j\le m}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j}d\bar{s}_j+\sum_{1\le k\le n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\bar{\theta}_k\right)\\
&\sum_{1\le j\le m}\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j}d\bar{s}_j+\sum_{1\le k\le n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}d\bar{z}_k-\sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le k\le n}}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\bar{C}_{kj}d\bar{s}_j\\
&=\sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le k\le n}}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j}-\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\bar{C}_{kj}\right)d\bar{s}_j+\sum_{1\le k\le n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}d\bar{z}_k\\
&=\sum_{1\le j\le m}\frac{\partial f}{\partial \bar{s}_j}d\bar{s}_j+\sum_{1\le k\le n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}d\bar{z}_k=\bar{\partial}_X f
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas.

Puisque l'on a

$$\delta(d\bar{s})=0\quad \bar{\partial}_\pi(d\bar{s})=0\quad \bar{\partial}_X(d\bar{s})=0,$$

un simple exercise d'algèbre linéaire montre qu'il suffit de vérifier l'assertion pour les sections $\bar{\theta}_k$ avec $k=1,\dots,n$.

Or on a (lemme (5.1))

$$(\Psi(\delta+\bar\partial_\pi))(\bar\theta_k) = -\Psi\left(\sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le l\le n}} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar z_l}\bar\theta_l \wedge d\bar s_j\right)$$
$$= -\sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le l\le n}} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar z_l} d\bar z_l \wedge d\bar s_j + \sum_{\substack{1\le j,\mu\le m\\ 1\le l\le n}} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar z_l}\bar C_{l\mu} d\bar s_\mu \wedge d\bar s_j,$$

et d'autre part

$$\bar\partial_X(\Psi(\bar\theta_k)) = \bar\partial_X(d\bar z_k - \sum_{1\le j\le m} \bar C_{kj} d\bar s_j)$$
$$= -\sum_{1\le j,\mu\le m} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar s_\mu} d\bar s_\mu \wedge d\bar s_j - \sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le l\le n}} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar z_l} d\bar z_l \wedge d\bar s_j$$
$$= -\sum_{1\le j,\mu\le m} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar t_\mu} d\bar s_\mu \wedge d\bar s_j + \sum_{\substack{1\le j,\mu\le m\\ 1\le l\le n}} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar z_l}\bar C_{l\mu} d\bar s_\mu \wedge d\bar s_j$$
$$- \sum_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le l\le n}} \frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar z_l} d\bar z_l \wedge d\bar s_j.$$

Le premier terme de la dernière expression est nul puisque l'on a par définition même de $\bar C$

$$\frac{\partial \bar C_{kj}}{\partial \bar t_\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar t_\mu}\left(\frac{\partial \bar h_k}{\partial \bar t_j}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar t_j}\left(\frac{\partial \bar h_k}{\partial \bar t_\mu}\right) = \frac{\partial \bar C_{k\mu}}{\partial \bar t_j}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

COROLLAIRE 5.1 *La composition des isomorphismes Φ et Ψ fournit un quasi-isomorphisme de complexes*

$$\begin{array}{ccc}
\cdots \to \mathscr{O}(S;\mathscr{E}^{0,q}(Y)) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathscr{O}(S;\mathscr{E}^{0,q+1}(Y)) \to \cdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
\cdots \to \mathscr{E}^{0,q}(X) & \xrightarrow{\bar\partial_X} & \mathscr{E}^{0,q+1}(X) \to \cdots
\end{array}$$

En particulier, les groupes de cohomologie $\mathbb{H}^q(X;\mathscr{O})$ *sont nuls pour* $q>n$.

6 Le complexe relatif

Pour tout point s de S, le morphisme Φ induit un isomorphisme $\Phi(s)$ de $\Omega_Y^{0,q}$ sur $G^{0,q}(s)=\Omega_{X(s)}^{0,q}$ et il existe un complexe rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \cdots\to\mathscr{E}^{0,q}(Y) & \xrightarrow{\epsilon(s)} & \mathscr{E}^{0,q+1}(Y)\to\cdots \\ \Phi(s)\downarrow & & \Phi(s)\downarrow \\ \cdots\to\mathscr{E}^{0,q}(X(s)) & \xrightarrow{\bar{\partial}_{X(s)}} & \mathscr{E}^{0,q+1}(X(s))\to\cdots \end{array}$$

LEMME 6.1. *La famille de complexes*

$$\cdots\to\mathscr{E}^{0,q}(Y)\xrightarrow{\epsilon(s)}\mathscr{E}^{0,q+1}(Y)\to\cdots$$

est une famille holomorphe de complexes différentiels elliptiques sur Y *paramétrée par* S.

Le complexe obtenu par application du foncteur $\mathscr{O}(S;\ )$ *coincide avec le complexe*

$$\cdots\to\mathscr{O}(S;\mathscr{E}^{0,q}(Y))\xrightarrow{\epsilon}\mathscr{O}(S;\mathscr{E}^{0,q+1}(Y))\to\cdots$$

du numéro précédent.

Démonstration. L'assertion résulte des définitions. On observera en particulier que, dans la carte ataptée ϕ, l'opérateur $\epsilon(s)$ associe à la différentielle

$$\omega=\sum_{k\in S(q;n)}a_k d\bar{w}_k,$$

où les a_k sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur V, la différentielle

$$\epsilon(s)(\omega)=-\sum_{\substack{k\in S(q;n)\\ 1\le l,\nu\le n}}\left(\frac{\partial a_k}{\partial w_\nu}D_{\nu l}(s)-\frac{\partial a_k}{\partial\bar{w}_l}\right)d\bar{w}_l\wedge d\bar{w}_k$$

et cette dernière est holomorphe par rapport à S. □

La théorie générale des complexes différentiels elliptiques ([2] et [3]) et le théorème (5.1) fournissent alors le théorème (1.1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D'Aprile M., Guenot J., *Sulla proprietà di banalità locale per le submersioni proprie*, B.U.M.I. (6) **5-A** (1986) - pp. 305-310.

[2] Guenot J., *Complexes elliptiques dépendant analytiquement d'un paramètre,* C.R.A.S., t. **274**, 470-472, Paris (1972).

[3] Guenot J., *Une formule de Lefschetz pour des complexes élliptiques dépendant d'un paramètre*, Thèse, Genève (1972).

[4] Hubbard J., *Sur les sections analytiques de la courbe universelle de Teichmüller*, Mens. Amer. Math. Society **66**, Providence (1976).

[5] Schneider M., *Halbstetigkeitssätze für relativ analytisch Räume*, Inventiones Math. **16**, (1972) 161-176.

Départment de Mathématiques
Université de la Calabre
87036 Arcavata di Rende (Italie)